1.8.3 Použití vzorců při úpravách mnohočlenů I

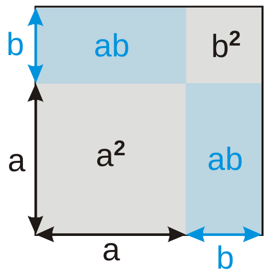
Předpoklady: 010802

V předchozí hodině (občas i dříve) a v mnoha dalších hodinách se poměrně často vyskytují výrazy jako $(2x-3)^2$, $(2x+1)^2$, $(x+2)^2$ někdy dokonce $(5-2x)^3$ nebo $(x+2)^3$. Výrazy vypadají podobně, zkusíme si jejich umocňování zjednodušit pomocí vzorců.

Obecný tvar závorek $(A+B)$ $\Rightarrow$

$$(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A^2 + AB + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Stejně jako u roznásobování závorek si můžeme pomoci geometrií: $(A+B)^2$ - obsah čtverce.



$\Rightarrow$ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$$(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A^2 + 2AB + B^2$$

$(A+B)^2 = \quad A^2 + \quad 2\,AB \quad + B^2$

$(3x+2)^2 = (3x)^2 + 2\cdot(3x)\cdot 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$

Př. 1: Vypočti dosazením do vzorce výraz $(2x+4)^2$.

$A = 2x; B = 4$

$(A+B)^2 = \quad A^2 \quad + 2\cdot A\cdot B + B^2$

$(2x+4)^2 = (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 4 + 4^2 = 4x^2 + 16x + 16$

Pedagogická poznámka: Řešení příkladu je nutné kontrolovat, protože někteří žáci raději roznásobují závorky a vzorec nepoužívají. Další naopak vzorec používají, ale snaží se příklady počítat bez dosazení rovnou $(3x+2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$. U nejlepších to není problém, ale slabší žáci se pak u těžších příkladů velmi rychle ztrácí. Při hodině chci, aby u všech následujících příkladů psali raději i dosazení.

Př. 2: Vypočti pomocí vzorce výraz $\left(6x+\frac{1}{3}\right)^2$.

$A=6x; B=\frac{1}{3}$

$(A+B)^2 = \quad A^2 \quad +2\cdot A\cdot B+ \quad B^2$

$\left(6x+\frac{1}{3}\right)^2 = (6x)^2 + 2\cdot 6x\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 36x^2+4x+\frac{1}{9}$

Př. 3: Vypočti pomocí vzorce $\left(x^2y^3+\frac{2}{3}xy\right)^2$.

$\left(x^2y^3+\frac{2}{3}xy\right)^2 = \left(x^2y^3\right)^2 + 2\cdot x^2y^3\cdot\frac{2}{3}xy + \left(\frac{2}{3}xy\right)^2 = x^4y^6+\frac{4}{3}x^3y^4+\frac{4}{9}x^2y^2$

Př. 4: Odvoď vzorec pro výraz $(A-B)^2$.

$(A-B)^2 = (A-B)\cdot(A-B) = A^2-AB-AB+B^2 = A^2-2AB+B^2$

$$(A-B)^2 = (A-B)\cdot(A-B) = A^2-2AB+B^2$$

Př. 5: Vypočti pomocí vzorce $(A-B)^2 = A^2-2AB+B^2$ výraz $(2x-3)^2$.

$A=2x; B=3$

$(A-B)^2 = \quad A^2 \quad -2\cdot A\cdot B+ \quad B^2$

$(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot 3+3^2 = 4x^2-12x+9$

Pedagogická poznámka: Při řešení předchozího příkladu se často objevuje chyba rozebíraná v následujícím příkladu. Toto místo je důležité, slabší žáci si musí uvědomit, že pokud chtějí dosazovat do vzorce, musí si svůj výraz upravit tak, aby vzorci doopravdy odpovídal.

Žáky, kteří jsou hotoví rychleji než většina třídy, vyzývám, aby příklad zkusili vyřešit pomocí vzorce $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$.

Př. 6: Někteří žáci řeší předchozí příklad takto:
$(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot(-3)+(-3)^2 = 4x^2+12x+9$.
Kde dělají chybu? Zkus sestavit poučení z této chyby.

$(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot(-3)+(-3)^2 = 4x^2+12x+9 \Rightarrow$ žák dosazoval za $b=-3$, což znamená, že měl závorku upravenou takto: $(2x-3)^2 = [2x+(-3)]^2 \Rightarrow$ měl tedy použít vzorec $(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A^2+2AB+B^2$:

$(2x-3)^2 = [2x+(-3)]^2 = (2x)^2+2\cdot 2x\cdot(-3)+(-3)^2 = 4x^2-12x+9$

Dvě možnosti, jak upravit $(2x-3)^2$:

- pomocí vzorce $(A-B)^2 = A^2-2AB+B^2$:
  $(A-B)^2 = \quad A^2 \quad -2\cdot A\cdot B+ \; B^2$
  $(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot 3+3^2 = 4x^2-12x+9$

- pomocí vzorce $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$:
  $(A+B)^2 = \quad A^2 \quad +2\cdot A\cdot B+ \; B^2$
  $(2x-3)^2 = [2x+(-3)]^2 = (2x)^2+2\cdot 2x\cdot(-3)+(-3)^2 = 4x^2-12x+9$

V obou případech je nutné upravit závorku tak, aby přesně odpovídala použitému vzorci.

Př. 7: Odvoď pomocí vzorce $(A+B)^2$ vzorec $(A-B)^2$.

Musíme v závorce $(A-B)$ vyrobit mezi členy plus $\Rightarrow (A-B) = (A+(-B))$.
Dosadíme:

$$(A+ \quad B)^2 = \; A^2+2A \quad B+ \quad B^2$$

$$(A-B)^2 = (A+(-B))^2 = A^2+2A(-B)+(-B)^2 = A^2-2AB+B^2$$

Př. 8: Vypočti pomocí vzorce $\left(\frac{x}{2}-\sqrt{3}\right)^2$.

$A = \frac{x}{2}; B = \sqrt{3}$

$(A-B)^2 \quad = \quad A^2 - 2\cdot A \cdot B \; + \; B^2$

$$\left(\frac{x}{2}-\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2 = \frac{x^2}{4} - x\sqrt{3}+3$$

Př. 9: Vypočti pomocí vzorce $\left(2x^2y-\frac{1}{2}y^2\right)^2$.

$$\left(2x^2y-\frac{1}{2}y^2\right)^2=\left(2x^2y\right)^2-2x^2y\cdot\frac{1}{2}y^2+\left(\frac{1}{2}y^2\right)^2=4x^4y^2-2x^2y^3+\frac{1}{4}y^4$$

Př. 10: Odvoď vzorec $\left(A+B\right)^3$.

$$\left(A+B\right)^3=\left(A+B\right)^2\left(A+B\right)=\left(A^2+2AB+B^2\right)\cdot\left(A+B\right)=$$
$$=A^2\cdot A+2AB\cdot A+B^2\cdot A+A^2\cdot B+2AB\cdot B+B^2\cdot B=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$

Pedagogická poznámka: Někteří žáci vzorec neodvozují, ale hádají. Většinou tak skončí u "vzorce" $\left(a+b\right)^3=a^3+3ab+b^3$. Pokud se neptají, nezasahuji ihned, nechávám je, aby si "ušetřili" i kus dalšího příkladu.

$$\left(A+B\right)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$

Odvození vzorce pro $\left(A+B\right)^3$ je dobrou příležitostí si popovídat o způsobech přibližné kontroly výsledků – kontroly, kterou lze udělat rychle a která umožňuje odhalit část chyb vzniklých při výpočtu.
$(A+B)^3$ - ze zadání je vidět, že konečný vzorec musí splňovat následující podmínky:

- musí být symetrický pro *A* a *B* (symetrický je i původní vzorec $\left(A+B\right)^3$),
- součet mocnin *A* a *B* v každém členu musí dát dohromady třetí mocninu (každý člen vznikne roznásobením tří závorek s první mocninou *A* nebo *B*),
- musí obsahovat A^3 a B^3 (při roznásobování závorek $\left(A+B\right)\left(A+B\right)\left(A+B\right)$ vzniknou při násobení pouze prvních nebo pouze posledních členů),
- všechny koeficienty (čísla před proměnnými) musí být kladné.

Určitě je možné vymyslet i jiné snadno kontrolovatelné podmínky. Důležité je uvědomit si, že kontrolu můžeme snadno alespoň částečně provést sami.

Pedagogická poznámka: U předchozího povídání je potřeba, aby si z něj studenti odnesli poznatek, že je dobré si výpočty kontrolovat. Nesmí však nabýt dojmu, že právě zmiňované vlastnosti jsou obecné nebo nějak výjimečné. Naopak měli by pochopit, že většina takových kontrol je důsledkem konkrétní situace.

Př. 11: Vypočti pomocí vzorce $\left(3x+2\right)^3$.

$$\left(3x+2\right)^3=\left(3x\right)^3+3\left(3x\right)^2\cdot2+3\left(3x\right)\cdot2^2+2^3=27x^3+54x^2+36x+8$$

Př. 12: Vypočti pomocí vzorce $\left(2x+\frac{1}{3}xy\right)^3$.

$$\left(2x+\frac{1}{3}xy\right)^3=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\frac{1}{3}xy+3\cdot 2x\left(\frac{1}{3}xy\right)^2+\left(\frac{1}{3}xy\right)^3=$$
$$=8x^3+4x^3y+\frac{2}{3}x^3y^2+\frac{1}{27}x^3y^3$$

Pedagogická poznámka: Občas se vyskytují studenti, kteří nevezmou vzorec pro třetí mocninu za svůj a kteří se snaží jeho používání obejít roznásobováním závorek nebo používáním vzorce pro druhou mocninu.
Takový přístup v tomto okamžiku zakazuji, protože cílem hodiny je naučit se vzorce používat.

Shrnutí: Vzorce umožňují zrychlit mnohé úpravy mnohočlenů.